FRANCE STRATÉGIE
ÉVALUER. ANTICIPER. DÉBATTRE. PROPOSER.

Guide de l'évaluation socioéconomique des investissements publics

## Complément opérationnel E

# RÈGLES DE DÉCISION À PARTIR DE LA VALEUR ACTUALISÉE NETTE SOCIOÉCONOMIQUE

**Joël Maurice[1] et Émile Quinet[2]**
Membres du comité d'experts

**Date de validation : comité du 2 juillet 2019**


### Résumé

La valeur actualisée nette socioéconomique (VAN SE) d'un projet consiste en une comparaison entre l'option du projet et l'option de référence[3], sur la base d'un calcul dont le *Guide de l'évaluation socioéconomique des investissements publics*[4] présente les principes et fixe la date de référence (prise comme origine des temps), à laquelle toutes les VAN SE doivent être ramenées pour être comparables.

Dans la pratique, il faut recenser toutes les options de projet possibles, calculer pour chacune d'elles sa VAN SE par rapport à l'option de référence, déterminer parmi toutes ces options de projet celle dont la VAN SE est maximale, vérifier que ce maximum est positif, et si tel est le cas, choisir cette option ; si la VAN SE maximale était négative, il faudrait choisir l'option de référence.

La recherche des dates optimales de réalisation et de fin d'exploitation est la première étape dans la programmation d'un investissement. Dans le cas le plus simple, où avantages annuels nets (bénéfices moins coûts) sont indépendants de la date de réalisation et sont, en outre, croissants au cours du temps, la date optimale de mise en


[1] Professeur honoraire d'économie à l'École nationale des Ponts et Chaussées.
[2] Professeur émérite, Paris School of Economics et École des Ponts ParisTech.
[3] Déterminée comme précisé dans le Complément opérationnel « définition de l'option de référence ».
[4] Trésor et France Stratégie, décembre 2017.

service est donnée par le critère de rentabilité immédiate (CRI) : c'est la date pour laquelle l'avantage annuel d'exploitation (bénéfice moins coût), rapporté au coût de l'investissement, devient supérieur au taux d'actualisation ; dans ce cas simple la durée optimale d'exploitation est infinie. Si l'avantage annuel croît, puis décroît, la date optimale de mise en service reste donnée par le CRI et la date de fin d'exploitation est celle pour laquelle l'avantage annuel deviendrait, le cas échéant, négatif ; mais il faut vérifier que la VAN SE correspondante est bien positive. Dans les cas plus complexes, il peut exister plusieurs « optimums » locaux, entre lesquels il faut choisir le maximum absolu, pourvu qu'il soit positif.

Une attention particulière doit être accordée au cas où la date optimale de réalisation serait déjà passée : il faudrait alors réaliser l'investissement le plus rapidement possible. Cela se produit si le maximum absolu positif de la VAN SE est obtenu en lançant la réalisation dès la date présente T.

Dans le cas d'un coût annuel de maintenance augmentant avec la durée d'exploitation, il faut s'interroger sur la durée pour laquelle ce coût atteindrait un montant si élevé qu'il serait préférable de mettre fin à l'exploitation de l'investissement de la « première génération » pour le remplacer par un investissement de « deuxième génération ». La détermination de cet âge optimal de remplacement fait intervenir « l'annuité constante équivalente » (dont la valeur actualisée est égale à la valeur actualisée de l'investissement et de toutes les dépenses de maintenance).

En cas de deux ou plusieurs projets, s'ils sont indépendants, on calcule séparément pour chaque projet sa VAN SE maximale et, si elle est positive, on le réalise à sa date optimale. Si les projets sont interdépendants (en concurrence ou en complémentarité), il faut calculer pour chaque séquence les dates optimales de mise en service et de fin d'exploitation de chaque composante, ainsi que les VAN SE correspondantes, dont la somme mesure l'intérêt de la séquence, et choisir celle de ces séquences qui apporte la VAN SE positive la plus forte.

Dans le calcul de la VAN SE évoquée ci-dessus, chaque composante (investissement, bénéfice, coût, valeur résiduelle) prend une valeur déterminée. En toute rigueur, chacune de ces composantes est une anticipation, affectée d'aléas ou d'incertitudes[5]. Il importe donc de recenser ces risques et dans la mesure du possible de leur faire correspondre des probabilités. Il est alors recommandé d'examiner comment varie la VAN SE selon les valeurs susceptibles d'être prises par les diverses composantes aléatoires. Le critère le plus abouti est « l'espérance mathématique de la VAN SE », chaque fois qu'on peut la calculer.

L'évolution du risque peut en général être considérée comme la somme de trois termes : un risque systématique, une évolution de tendance autonome certaine et un risque propre au projet hors tendance autonome. Chacun de ces trois termes doit faire l'objet d'un traitement différent.

[5] Voir le *Guide d'évaluation socioéconomique des investissements publics* précité, chapitre 5.

La VAN SE[6] consiste en une comparaison entre deux possibilités : l'option du projet et l'option de référence[7], entre lesquelles elle permet de faire un choix, selon des modalités précisées ci-dessous (les notations sont rappelées dans l'encadré 1 et les formules dans l'encadré 2). Le projet est préférable à l'option de référence si et seulement si la VAN SE est positive.

Si l'évaluation se limitait à ces deux options, elle ne permettrait pas d'affirmer qu'il n'existe pas une autre option plus avantageuse. Une réponse logique à cette objection serait : recensons toutes les options possibles, calculons pour chacune d'elle sa VAN SE par rapport à l'option de référence, ramenons[8] toutes ces VAN SE à une même date conventionnelle prise comme origine des temps (appelée date de référence) et choisissons parmi toutes ces options celle dont la VAN SE est la plus grande, ou, si les VAN SE sont toutes négatives, choisissons l'option de référence.

Cependant, cette réponse se heurte à plusieurs difficultés pratiques. D'abord, dès que le nombre d'options recensées est élevé, le calcul de toutes les VAN SE peut s'avérer excessif en termes de coût monétaire et de temps passé. Ce sera notamment – mais pas uniquement – le cas lorsque les variantes sont discrètes et qu'il n'est pas possible d'exprimer leur VAN SE en fonctions continues et dérivables d'un ou plusieurs paramètres, ce qui permettrait de recourir aux méthodes générales d'optimisation[9] des fonctions.

Ensuite, la possibilité de distinguer les options entre elles dépend du pouvoir séparateur du critère de la VAN SE, compte tenu des imprécisions qui entourent son calcul et de ce que ce calcul n'intègre pas toujours tous les éléments de décision. Lorsque les bénéfices et/ou les coûts calculés dans les VAN SE des options sont aléatoires ou incertains, que leurs plages d'erreur se recouvrent largement et qu'en outre, dans le secteur en cause ou pour le problème particulier considéré, il y a d'autres bénéfices que l'on n'est pas capable de traduire en termes monétaires, mais dont on a de bonnes certitudes de penser qu'ils sont non négligeables, alors la comparaison des VAN SE perd de son pouvoir discriminant.

[6] Voir *Guide de l'évaluation socioéconomique des investissements publics*, décembre 2017, Direction générale du Trésor, SGPI et France Stratégie. Toutes les considérations développées dans le présent complément méthodologique s'appliquent à l'optimisation en termes socioéconomiques, et non en termes financiers. En particulier, les bénéfices et les coûts pris en compte ici comprennent les bénéfices et les coûts monétaires, mais aussi monétarisés à l'aide de « valeurs tutélaires ». Par ailleurs, les bénéfices et les coûts portés par la puissance publique doivent être affectés du coefficient d'opportunité des fonds publics (COFP), fixé à 0,20.

[7] Déterminée comme précisé dans le Complément opérationnel « Définition de l'option de référence ».

[8] Cela implique en particulier d'exprimer tous les bénéfices et coûts en euros constants, en prix de cette année de référence (par exemple 2015). On utilise comme déflateur le prix du PIB et on tient compte bien sûr de l'évolution des prix relatifs.

[9] Conditions du premier ordre, conditions du deuxième ordre.

Une expertise soigneuse doit donc être exercée pour trouver un équilibre entre ces exigences contradictoires, entre le désir de ne pas laisser passer une option intéressante et la nécessité de ne pas se lancer dans des études trop lourdes et peu concluantes.

Sous ces réserves, qui ne peuvent trouver leur solution qu'au cas par cas, on va examiner ci-après des situations de plus en plus complexes en termes de nombre d'options et de situation de programmation, et nécessitant donc de la part du calcul économique un pouvoir séparateur croissant.

**Encadré 1**
**Notations**

Ces notations dérivent, en les détaillant, de celles du *Guide d'évaluation socioéconomique des investissements publics* (décembre 2017), France Stratégie et Trésor, page 36.

$i$ l'année courante, comptée à partir de la date de référence (par exemple 2015), pour laquelle $i = 0$

*r* le taux d'actualisation, en distinguant deux périodes[10], au cours desquelles il est constant : jusqu'en 2070, puis après 2070

Soit pour le projet considéré :

*N* la date du début de l'évaluation, qui est aussi celle de la réalisation de l'investissement, si cette réalisation s'étendait sur plusieurs année, N serait la dernière

D durée d'exploitation du projet

F=N+D la date de la dernière année prise en compte dans l'évaluation du projet

$\mathrm{VAN\ SE_N}$ la valeur nette socioéconomique du projet, actualisée à la date de référence si la date de réalisation de l'investissement est N

Au sein des coûts, on distingue l'investissement : son montant est noté *J.* Sa réalisation peut s'étaler sur plus années, mais pour simplifier on la suppose ici concentrée sur la seule année *N*. L'année *N+1* est dès lors la première année d'exploitation.

Tous les bénéfices et les coûts de l'année *i* sont exprimés en euros constants de l'année de référence (par exemple 2015), et estimés en différentiel par rapport à l'option de référence. Ils s'entendent hors TVA.

Les dépenses et les recettes publiques liées au projet doivent être multipliées par le coût d'opportunité des fonds publics (COFP), noté ici pour simplifier *k*, et dont la valeur est fixée[11] à 0,20.

L'application éventuelle, à la même assiette que le COFP, d'un prix fictif de rareté des fonds publics (PFRFP) sort du champ du présent Complément opérationnel.

[10] Voir le rapport Quinet (2013), *L'évaluation socioéconomique des investissements publics*, page 39. Bien noter que ce taux d'actualisation dépend du coefficient béta applicable au projet considéré, en distinguant le cas échéant ses composantes. Pour plus de détails, voir le complément opérationnel intitulé « Taux d'actualisation ».

[11] Voir le *Guide de l'évaluation socioéconomique…*, p. 36 et rapport Quinet, p. 39.

### Encadré 2a
### Formules donnant la VAN SE, actualisée à la date de référence (prise comme origine des temps)

**Cas où les bénéfices nets sont indépendants de la date de réalisation N**

- ***Notations simplifiées***

Par exemple, le bénéfice de l'an 2040 est implicitement supposé le même que l'année de réalisation du projet soit 2015 ou 2025. Cette hypothèse simplificatrice paraît suffisante lorsque les infrastructures du projet ont une durée de vie longue (parfois assimilée à l'infini) ou que les bénéfices ou les coûts sont quasi constants dans le temps.

**Tableau (a)**

| Variable | Montant hors COFP | Fonds publics contenus | Montant COFP inclus |
|---|---|---|---|
| Investissement | *J* | *jp* | $J = j + k.j_p$ |
| Bénéfices année *i* | $b_i$ | $bp_i$ | $B_i = b_i + k.bp_i$ |
| Coûts de l'année *i* | $c_i$ | $cp_i$ | $C_i = c_i + k.cp_i$ |
| Valeur résiduelle | *Vr* | *vrp* | $VR = vr + k.vrp$ |

Rappel : k désigne le coût d'opportunité des fonds publics (COFP) : il est pris égal à 0,20

Remarque : *jp* et $cp_i$ positifs signifient des dépenses publiques ; $bp_i$ et *vrp* positifs signifient des recettes publiques

- ***Formules donnant la VAN SE***

La formule du *Guide*[12], modifiée de façon à mettre l'investissement en évidence, s'écrit :

$$VAN\ SE_N = -\frac{J}{(1+r)^N} + \sum_{i=N+1}^{i=N+D} \frac{B_i - C_i}{(1+r)^i} + \frac{VR}{(1+r)^{N+D+1}} \qquad \text{(a1)}$$

En mettant en évidence les composantes assujetties au coût d'opportunité des fonds publics (COFP), (a1) devient :

$$VAN\ SE_N = -\frac{j}{(1+r)^N} + \sum_{i=N+1}^{i=N+D} \frac{b_i - c_i}{(1+r)^i} + \frac{vr}{(1+r)^{N+D+1}}$$

$$+\, k\,.\left\{-\frac{jp}{(1+r)^N} + \sum_{i=N+1}^{i=N+D} \frac{bp_i - cp_i}{(1+r)^i} + \frac{vrp}{(1+r)^{N+D+1}}\right\} \qquad \text{(a2)}$$

Remarque : on s'attend à ce que, dans la plupart des projets publics, les contenues en fonds publics des coûts, y compris de l'investissement, soit plus important que ceux des bénéfices. Dans (a2), le crochet $\left\{-\frac{jp}{(1+r)^N} + \sum_{i=N+1}^{i=N+D} \frac{bp_i - cp_i}{(1+r)^i} + \frac{vrp}{(1+r)^{N+D+1}}\right\}$ est alors négatif ; le coût d'opportunité des fonds public contribue à diminuer la $VAN\ SE_N$.

[12] Voir le *Guide de l'évaluation socioéconomique…*, p. 36.

**Encadré 2b**
**Formules donnant la VAN SE,**
**actualisée à la date de référence (prise comme origine des temps)**

**Cas où les bénéfices nets dépendent de la date de réalisation N**

- ***Notations simplifiées***

En toute rigueur, l'importance ou la complexité du projet peuvent conduire à tenir compte de l'influence que la date *N* de réalisation du projet exerce sur les variables, par exemple sur le coût d'investissement, ou sur le déplacement du calendrier de maintenance, voire sur les recettes. Le tableau (b) introduit à cet effet l'indice *N* dans les notations.

**Tableau (b)**

| Variable | Montant hors COFP | Fonds publics contenus | Montant COFP inclus |
|---|---|---|---|
| Investissement | $j_N$ | $jp_N$ | $J_N = j_N + k.jp_N$ |
| Bénéfices année *i* | $b_{i,N}$ | $bp_{i,N}$ | $B_{i,N} = b_{i,N} + k.bp_{i,N}$ |
| Coûts de l'année *i* | $c_{i,N}$ | $cp_{i,N}$ | $C_{i,N} = c_{i,N} + k.cp_{i,N}$ |
| Valeur résiduelle | $vr_N$ | $vrp_N$ | $VR_N = vr_N + k.vrp_N$ |

Rappel : k désigne le coût d'opportunité des fonds publics (COFP) : il est pris égal à 0,20

Remarque : $jp_N$ et $cp_{i,N}$ positifs signifient des dépenses publiques $bp_{i,N}$ et $vrp_N$ positifs signifient des recettes publiques

- ***Formules donnant la VAN SE***

La formule du *Guide*[13], modifiée de façon à mettre l'investissement en évidence, s'écrit :

$$VAN\ SE_N = -\frac{J_N}{(1+r)^N} + \sum_{i=N+1}^{i=N+D} \frac{B_{i,N}-C_{i,N}}{(1+r)^i} + \frac{VR_N}{(1+r)^{N+D+1}} \qquad \text{(b1)}$$

En mettant en évidence les composantes assujetties au coût d'opportunité des fonds publics (*cofp*), (b1) devient :

$$VAN\ SE_N = -\frac{j_N}{(1+r)^N} + \sum_{i=N+1}^{i=F} \frac{b_{i,N}-c_{i,N}}{(1+r)^i} + \frac{vr_N}{(1+r)^{F+1}}$$
$$+ k.\left\{-\frac{jp_N}{(1+r)^N} + \sum_{i=N+1}^{i=F} \frac{bp_{i,N}-cp_{i,N}}{(1+r)^i} + \frac{vrp_N}{(1+r)^{F+1}}\right\} \qquad \text{(b2)}$$

# 1. Cas où il n'y a qu'un seul projet : choix des dates de réalisation et de fin d'exploitation

Pour mettre en œuvre la formule de la VAN SE, il est nécessaire de stipuler la date *N* de réalisation du projet ainsi que la durée *D* d'exploitation, ou la date de fin d'exploitation F=N+D, avec la valeur résiduelle *VR* qui leur correspond. Des valeurs différentes de ces paramètres conduisant à des résultats différents pour la VAN SE, la question se pose de déterminer la valeur « optimale » de chacun d'eux, c'est-à-dire celle qui permet de

[13] Voir le *Guide de l'évaluation socioéconomique…*, p. 36.

maximiser la *VAN SE* (actualisée à la date de référence, choisie comme origine des temps).

La recherche des dates optimales de réalisation et de fin d'exploitation est donc la première étape dans la programmation d'un investissement. Cette recherche peut s'effectuer selon diverses procédures, plus ou moins complexes selon les caractéristiques du projet.

### 1.1. Cas le plus simple, où les bénéfices nets sont indépendants de la date de réalisation[14]

Le cas le plus simple à traiter est celui d'un projet dont le coût d'investissement peut être considéré comme indépendant de la date de réalisation, et dont les avantages annuels nets[15] d'exploitation ne dépendent pas, eux non plus, de la date de réalisation, sont positifs[16] et, en outre, croissent avec la date d'exploitation. Dans ce cas, la durée d'exploitation est très longue (« infinie »). La date optimale de réalisation est alors fournie par la règle du critère de rentabilité immédiate (CRI) : le rapport entre le bénéfice net de première année d'exploitation et le coût de l'investissement doit être égal[17] au taux d'actualisation *r* ; à cette date optimale, la VAN SE actualisée à la date de référence passe par son maximum, et celui-ci est positif[18]. Il se peut que, dès la date présente notée *T*, la date optimale soit déjà dépassée ; il faudrait dès lors réaliser l'investissement sans plus tarder; la réalisation immédiate constituerait ainsi un « optimum en coin ».

L'annexe 1 explicite cette règle du CRI et fournit les procédures à utiliser dans les cas plus généraux où la durée d'exploitation n'est pas « très longue », et où les avantages annuels nets d'exploitation ne sont pas toujours positifs et/ou croissants au fil des ans. Il conviendrait aussi d'arrêter l'exploitation si, à une date *F*, les bénéfices annuels nets d'exploitation devenaient négatifs : c'est le critère de fin d'exploitation (CFE). Il peut y avoir plusieurs maximums locaux et le cas échéant un maximum en coin pour la date de réalisation *N* et, le cas échéant, un optimum en coin pour *N*=*T* ; il peut aussi y avoir plusieurs maximums locaux pour la date de fin d'exploitation *F* ; il faut alors rechercher la combinaison (*N,F*) qui conduit au maximum absolu de VAN SE actualisée à la date de référence. Une fois identifiées ces valeurs de la date de réalisation *N* et de la date de fin d'exploitation *F* conduisant au maximum absolu de VAN SE, il importe de vérifier que ce maximum absolu est positif. Si cette VAN SE maximisée était négative, il faudrait renoncer à l'option considérée, au profit d'une autre option ou de l'option de référence.

---

[14] Notations et formules : voir encadré 2a ci-dessus.

[15] Pour chaque année d'exploitation : avantage d'exploitation = bénéfice d'exploitation moins coût d'exploitation.

[16] Et suffisants pour que la VAN SE du projet soit positive.

[17] Plus précisément : l'année optimale est celle pour laquelle le CRI, qui était jusque-là inférieur à r, devient cette année-là égal ou supérieur à r.

[18] Un cas moins restrictif est celui où les avantages annuels nets sont « unimodaux », c'est-à-dire d'abord positifs et croissants, puis décroissants. S'ils ne deviennent jamais négatifs, les résultats qui viennent d'être énoncés subsistent ; s'ils deviennent négatifs, la durée d'exploitation est limitée (voir § suivant) et il faut vérifier que la VAN SE est positive (voir annexe 1).

### 1.2. Approfondissements dans les situations où les bénéfices nets dépendent de la date de réalisation[19]

Les critères CRI et CFE sont d'application simple, suffisant dans de nombreux cas, où la vie du projet est longue (on l'assimile parfois à l'infini) et les bénéfices et les coûts assez stables.

Cependant, ils reposent sur l'hypothèse implicite que ni le bénéfice annuel, ni le coût annuel, ni le coût d'investissement lui-même, ne dépendent de la date de réalisation $N$, ce qui n'est pas le cas pour les coûts de maintenance, notamment de gros entretien. La prise en compte du coût annuel de maintenance suscite dès lors une interrogation sur l'âge auquel ce coût atteindrait un montant si élevé qu'il serait préférable de mettre fin à l'exploitation de cet investissement « de première génération » pour le remplacer par un investissement « de deuxième génération ». La même question se poserait ensuite, en théorie, pour le remplacement de la deuxième génération par une troisième, et ainsi de suite, mais en pratique la prévision des données correspondantes deviendrait de plus en plus hypothétique. On est ainsi conduit à se poser la question de l'enchaînement entre les générations de projets, et celle du choix de la durée optimale d'exploitation de la première génération du projet.

Les formules de calcul sont dans ce cas plus lourdes que dans le cas simplifié décrit au § 1.1 ci-dessus. Elles sont présentées dans l'annexe 2. Il est justifié d'y recourir lorsque la maintenance joue un rôle important dans le projet, sa nature, la qualité et la sécurité du service qu'il a pour vocation de remplir.

### 1.3. Approche numérique

Les formules fournies par l'approche simplifiée (voir § 1.1), ou même par l'approche plus approfondie tenant compte du calendrier de la maintenance (voir § 1.2), peuvent être considérées comme insuffisamment précises, surtout dans le cas de projets de grande taille (tout en restant « petits » à l'échelle macroéconomique pour relever des méthodes du calcul économique) ou à forts enjeux socioéconomiques. Il peut alors être nécessaire de tenir compte notamment de l'influence que la date $N$ de réalisation peut avoir sur le coût de l'investissement ainsi que sur les flux annuels ultérieurs des bénéfices et, au-delà des coûts de maintenance, sur les autres coûts.

La recherche des dates optimales de réalisation et de fin d'exploitation de la première génération du projet procède alors de calculs numériques s'appuyant sur les prévisions contingentes détaillées des bénéfices et des coûts annuels et sur la mise en œuvre d'algorithmes adaptés au type du projet et à ses caractéristiques.

## 2. Cas de deux ou plusieurs projets

Lorsqu'on est en présence de deux projets, plusieurs situations peuvent se présenter : ils peuvent être totalement indépendants (par exemple, on construit une route au nord de la

[19] Notations et formules : voir encadré 2b ci-dessus.

France et une université au sud), ou au contraire entretenir des relations de concurrence ou de complémentarité, la réalisation de l'un influant sur les bénéfices et les coûts de l'autre (par exemple une autoroute et une liaison ferroviaire sur le même corridor).

### 2.1. Cas de projets indépendants

Dans le cas de projets indépendants, la solution est simple. On calcule indépendamment pour chaque projet sa VAN SE maximale et, si elle est positive, on le réalise à sa date optimale. Il n'y a aucune interférence entre les projets et leurs financements (sauf en cas de rareté des fonds publics, qui sort du champ du présent Complément opérationnel).

### 2.2. Cas de projets interdépendants

Dans le cas de projets A et B entretenant des relations de concurrence ou de complémentarité, et sauf pour des situations particulières, le seul moyen est d'énumérer les séquences possibles de réalisation des projets A et B :

- A seul
- B seul
- A puis B (la VAN SE de B étant alors évaluée en supposant que A est réalisé)
- B puis A (la VAN SE de A étant alors évaluée en supposant que B est réalisé)

Il faut alors calculer dans chaque séquence les dates optimales de mise en service et de fin d'exploitation de chaque opération, les VAN SE actualisées à la date de référence correspondantes, dont la somme mesure l'intérêt de la séquence, et choisir celle de ces quatre séquences qui apporte la VAN SE la plus forte.

Lorsqu'il y a plus de deux projets, le nombre de VAN SE à la date de référence à calculer devient vite exorbitant. À titre d'exemple, lorsqu'on est en présence de quatre projets, il faut calculer les VAN SE de 64 séquences, les VAN SE de chacune de ces séquences étant elle-même la composition de quatre VAN SE différentes.

## 3. Prise en compte des risques

Dans le calcul de la VANSE évoquée ci-dessus, chaque composante (investissement, bénéfice, coût, valeur résiduelle) prend une valeur déterminée. En toute rigueur, chacune de ces composantes est une anticipation, affectée d'aléas ou d'incertitudes[20]. Il importe donc de recenser ces risques et dans la mesure du possible de leur faire correspondre des probabilités. Il est alors recommandé d'examiner comment varie la VAN SE selon les valeurs susceptibles d'être prises par les diverses composantes aléatoires. Le critère le plus abouti est « l'espérance mathématique de la VAN SE », chaque fois que l'on peut la calculer.

[20] Voir le *Guide d'évaluation socioéconomique des investissements publics*, chapitre 5.

À titre d'exemple, un projet courant d'équipement hospitalier mettra en jeu des coûts de construction et d'entretien, ainsi que des bénéfices qui varieront en fonction de la valeur de la vie humaine et de l'évolution dans le temps du nombre de malades que l'équipement hospitalier est destiné à guérir. Chacun de ces effets peut avoir des profils de risques différents et devra alors faire l'objet d'une analyse particulière.

Pour chacun des effets qu'il apparaîtra nécessaire d'analyser de façon séparée, son évolution peut en général être considérée comme la somme de trois termes : un risque systématique, une évolution de tendance autonome certaine et un risque propre au projet hors tendance autonome. Chacun de ces termes doit faire l'objet d'un traitement différent.

- **Le risque systématique**

Le risque systématique est dû à la corrélation[21] des bénéfices et des coûts annuels du projet avec les aléas de l'évolution du contexte macroéconomique, résumé pour simplifier dans le produit intérieur brut (le PIB) annuel par tête. Cette corrélation est à prendre en compte doublement dans le calcul de la VAN SE : au dénominateur, dans la valeur du taux d'actualisation à utiliser, et au numérateur, dans l'espérance mathématique des avantages annuels.

- **La tendance autonome**

L'évolution de l'effet considéré comporte en général une tendance certaine autonome. Par exemple, dans le cas de l'équipement hospitalier évoqué plus haut, ce sera l'extension de la maladie, peut-être due à la généralisation progressive d'un style de vie propre à sa propagation.

- **Le risque propre hors tendance autonome**

Le risque propre hors tendance autonome correspond au reste de l'évolution. Il est de moyenne nulle (l'effet de moyenne est par définition capté par le trend autonome précédent) et il est représenté par une variable aléatoire temporelle centrée, non corrélée au PIB par tête.

Le traitement du risque propre hors tendance autonome sera différent selon qu'il est diversifiable ou non.

Lorsqu'il est diversifiable, il n'a pas à être pris en compte en raison du théorème d'Arrow-Lindt. Ce sera par exemple le cas où une centrale électrique tombe en panne : la puissance émise sur l'ensemble du réseau s'en trouve réduite, mais pour chaque consommateur, cette réduction est divisée par le nombre de consommateurs branchés sur le réseau. Comme ce nombre de consommateurs est très élevé, la réduction pour chacun est négligeable. Si un consommateur supplémentaire vient se brancher sur le

---

[21] Plus précisément, « élasticité $\beta$ » de la composante considérée du projet par rapport au PIB réel par tête.

réseau, le risque pour les autres usagers est réduit d'autant. S'ils sont en nombre infini, au total, le risque n'a pas à être pris en compte.

La situation est différente en cas de risque propre non diversifiable, ce qui se produira par exemple dans le cas d'une autoroute : si un incident (accident, éboulis, avalanche, etc.) entraîne une réduction du nombre de voies et, partant, une augmentation de la congestion, ce risque n'est pas diversifié, tous les usagers de cette autoroute le subissent et si un usager supplémentaire apparaît, il ne contribue ni à soulager les autres usagers, ni à réduire les conséquences de l'incident.

Dans le cas où des informations nouvelles seraient susceptibles de réduire progressivement l'éventail des risques futurs, une nombreuse littérature (théorie des options réelles traitée par la programmation dynamique) aboutit au résultat général que la date optimale de réalisation se trouve très généralement reculée. Dans le cas d'un projet dont les avantages croîtraient continûment dans le temps, des simulations montrent qu'une manière simple de prendre en compte l'ordre de grandeur du phénomène est d'augmenter le critère de rentabilité immédiate (CRI) d'un point environ ; dans le cas le plus simple examiné au § 1.1, le CRI deviendrait : $A_t/J = r + 1\%$.

On voit ainsi que la distinction entre risque du projet diversifiable et non diversifiable n'est pas simple, et ne se réduit pas forcément à la distinction entre investissement public et investissement privé.

- **Le cas particulier des biais d'optimisme**

Une situation fréquente assimilable à un risque est celle où l'incertitude sur les effets d'un projet résulte non de la réalité des processus de calcul mis en jeu mais de possibles manipulations stratégiques sur les estimations des paramètres qu'il implique. Ainsi, le syndrome des biais d'optimisme, mis en évidence à la suite d'une expérience longue et bien établie, et bien étudiés par la littérature scientifique, conduit à sous-estimer les coûts et à surestimer les bénéfices des projets. Les remèdes consistent à expertiser les études et à en confronter les résultats avec les retours d'expérience obtenus pour des investissements de types analogues.

# Annexe 1
# Détermination de la date *N* optimale de réalisation du projet
# Critère de rentabilité immédiate CRI et ses extensions

Considérons pour la réalisation du projet trois dates successives[22], *N-1*, *N* et *N+1*, et appelons respectivement $V_{N-1}$, $V_N$ et $V_{N+1}$ leurs VAN SE, actualisées à la date de référence (prise comme origine des temps).

La démarche générale suivie ici consiste à commencer par rechercher tout **maximum local positif** *N*, caractérisé par la double condition suivante :

– première condition : si le projet est réalisé l'année *N*, sa *VAN SE* est plus grande[23] que s'il est réalisé l'année antérieure et que s'il est réalisé l'année postérieure :

$$VAN\ SE_N > VAN\ SE_{N-1} \text{ et } VAN\ SE_N > VAN\ SE_{N+1} \qquad (101)$$

– deuxième condition : la VANSE de l'année *N* est positive :

$$VAN\ SE_N > 0 \qquad (102)$$

La double condition (101) peut s'exprimer de façon équivalente sous la forme suivante : si la date de réalisation passait de *N-1* à *N*, la variation de la VAN SE (actualisée à la date de référence) serait positive, et si la date de réalisation passait de *N* à *N+1*, la variation de la VAN SE (actualisée à la date de référence) serait négative. Ce qui s'écrit :

$$VAN\ SE_N - VAN\ SE_{N-1} > 0 \text{ et } VAN\ SE_{N+1} - VAN\ SE_N < 0 \qquad (103)$$

Il peut exister le cas échéant plusieurs optimums locaux positifs.

Il faut en outre accorder une attention particulière à l'année présente notée *T,* car elle constitue un cas particulier, dans la mesure où l'on ne peut pas remonter le temps :

– la condition (103) se réduit dans ce cas à : $VAN\ SE_{T+1} - VAN\ SE_T < 0$ (104)

– la condition (102) s'écrit : $VAN\ SE_T > 0$ (105)

Si et seulement ces deux conditions (104) et (105) sont remplies, la date *T* constitue un « **maximum en coin positif** ». Cela signifie qu'il aurait été préférable de réaliser le projet une ou plusieurs années avant la date présente T.

[22] La date de fin d'exploitation F est supposée la même, quelle que soit la date de réalisation.
[23] Supérieure strictement ou, le cas échéant, égale.

Parmi tous ces optimums locaux positifs et l'optimum en coin positif de la VAN SE, s'ils existent, Il faut ensuite retenir l'année de réalisation qui fournit le « **maximum absolu** » (il est alors lui-même positif). S'il n'existe ni maximum local positif, ni maximum en coin positif, donc aucun maximum absolu positif, il faut renoncer au projet et s'en tenir à l'option de référence.

La suite de cette annexe 1 fournit des indications sur la marche à suivre pour estimer la valeur optimale de la date de réalisation *N* : sont présentées ci-après trois approches, en commençant par la plus simple.

## 1. Hypothèse simplificatrice où l'année de réalisation du projet n'aurait pas d'influence sur les bénéfices et les coûts, y compris d'investissement, de l'année *i*

Les notations sont celles définies à l'encadré 2a.

- **Maximum local en *N***

Les deux conditions (103) se transcrivent comme suit.

– La condition $VAN\ SE_N - VAN\ SE_{N-1} > 0$ se traduit, tous calculs faits, par la condition suivante :

$$r.J - [B_N - C_N] > 0 \qquad \text{équivalente à :} \qquad r > \frac{B_N - C_N}{J} \tag{106}$$

– La condition $VAN\ SE_{N+1} - VAN\ SE_N < 0$ se traduit, tous calculs faits, par la condition suivante :

$$r.J - [B_{N+1} - C_{N+1}] < 0 \quad \text{équivalente à :} \quad \frac{B_{N+1} - C_{N+1}}{J} > r \tag{107}$$

***Interprétation*** : ces conditions expriment que la date optimale de réalisation *N* est celle pour laquelle l'avantage (COFP compris) de la première année d'exploitation, rapporté au montant de l'investissement (COFP compris), devient supérieur au taux d'actualisation. C'est le **critère de rentabilité immédiate** (CRI), parfois appelé critère de Claude Abraham, qui en a recommandé l'usage.

***Remarque*** : le respect des deux conditions simultanées (106) et (107) implique que, autour de *N*, le bénéfice net, COFP compris, soit croissant.

***Rappel*** : il faut en outre vérifier la condition (102), c'est-à-dire qu'en *N* la VAN SE est positive.

**Les conditions (106) et (107) peuvent s'écrire sous des formes équivalentes** en faisant apparaître les composantes assujetties au coût d'opportunité des fonds publics (COFP, noté ci-après *k*) :

$$r.(j + k.jp) - [(b_N + k.bp_N) - (c_N + k.cp_N)] > 0 \tag{108}$$

et

$$r.(j + k.jp) - [(b_{N+1} + k.bp_{N+1}) - (c_{N+1} + k.cp_{N+1})] < 0 \qquad (109)$$

Ces conditions peuvent à leur tour s'écrire sous les formes équivalentes suivantes, où *on regroupe les dépenses publiques dans le deuxième crochet*, auquel s'applique le coût fictif de rareté des fonds publics :

$$[b_N - c_N - r.j] - k.[r.jp + cp_N - bp_N] < 0 \qquad (110)$$

et

$$[b_{N+1} - c_{N+1} - r.j] - k.[r.jp + cp_{N+1} - bp_{N+1}] > 0 \qquad (111)$$

- **Maximum en coin à la date présente T**

De même la condition pour que la date présente T constitue un optimum en coin s'écrit :

$$[b_{T+1} - c_{T+1} - r.j] - k.[r.jp + cp_{T+1} - bp_{T+1}] > 0 \qquad (112)$$

***Rappel*** : Il faut en outre vérifier que, dans ce maximum en coin *T*, $VAN\ SE_T > 0$

- **Étape suivante : détermination de la date optimale F de fin d'exploitation**

Considérons[24] trois années successives de fin d'exploitation *F-1*, *F* et *F+1*, et appelons respectivement $VAN\ SE\ (F-1)$, $VAN\ SE(F)$ et $VAN\ SE\ (F+1)$ leurs VAN SE, actualisées à la date de référence (prise comme origine des temps).

La démarche suivie consiste à rechercher d'abord tout maximum local positif *F*, caractérisé par la double condition suivante :

– première condition : l'année *F* considérée, la VAN SE est supérieure[25] à celle de l'année antérieure et à celle de l'année postérieure :

$$VAN\ SE\ (F) > VAN\ SE\ (F-1) \text{ et } VAN\ SE(F) > VAN\ SE(F+1) \qquad (113)$$

– deuxième condition : $VAN\ SE(F) > 0$ (114)

En considérant les variations, la double condition (113) peut s'écrire sous la forme équivalente :

$$VAN\ SE\ (F) - VAN\ SE\ (F-1) > 0 \text{ et } VAN\ SE\ (F+1) - VAN\ SE\ (F) < 0 \qquad (115)$$

À son tour, cette double condition peut s'écrire, tous calculs faits, sous la forme :

$$[B(F) - C(F)] > 0 \text{ et } [B(F+1) - C(F+1)] < 0 \qquad (116)$$

***Rappel*** : il faut en outre vérifier la condition (114) : $VAN\ SE\ (F) > 0$

[24] La date de réalisation N est supposée la même, quelle que soit la date de fin d'exploitation.

[25] Supérieure strictement ou, le cas échéant, égale.

Avec les hypothèses considérées ci-dessus, où les bénéfices et les coûts sont indépendants de la date de réalisation du projet, la double condition (116) indique que, à tout maximum local de la date de fin d'exploitation, l'avantage d'exploitation est positif, juste avant de devenir négatif.

Il en résulte que si l'avantage d'exploitation était toujours positif, alors la date optimale de fin d'exploitation serait repoussée « à l'infini ».

Dans le cas où l'avantage d'exploitation ne serait pas toujours positif, il peut exister plusieurs maximums locaux de la date de fin d'exploitation. Il faut alors choisir la date relative au **maximum absolu**. S'il n'existe aucun maximum local ou en coin, il faut renoncer au projet et s'en tenir à l'option de référence.

**2. Cas général où l'année de réalisation du projet influence les bénéfices et les coûts, y compris d'investissement**

***Approche analytique***

Il s'agit de transcrire les conditions présentées au §1 ci-dessus, qui utilisent les notations définies à l'encadré 2a, en utilisant à leur place les notations définies à l'encadré 2b.

Voir notamment l'annexe 2 ci-après.

***Calcul numérique***

Le plus opérationnel est de procéder numériquement (voir fiche ci-jointe), par itérations : considérer pour la date de réalisation du projet une valeur d'amorçage de *N* ; calculer séparément d'abord $VAN\,SE_N$ relative à cette année de réalisation *N*, puis $VAN\,SE_{N+1}$ relative à l'année de réalisation *N+1* ; comparer ces deux valeurs. Tant que $VAN\,SE_N < VAN\,SE_{N+1}$, ajouter 1 à la valeur d'amorçage de *N* et recommencer les calculs. On obtiendra un maximum local lorsque, l'inégalité basculant, on aura $VAN\,SE_N > VAN\,SE_{N+1}$. Un maximum local négatif ou nul serait à éliminer.

On pourra prendre comme première valeur d'amorçage l'année présente *T*, pour vérifier s'il s'agit d'un maximum en coin. Mais il y aura lieu de rechercher d'autres maximums locaux positifs éventuels, à l'aide d'autres valeurs d'amorçage, puis d'identifier le **maximum absolu**.

# Annexe 2
# Approfondissement : cas d'un coût annuel de maintenance *M* pouvant devenir très important

Le coût de maintenance de l'année *i* est lié à l'âge noté $u = i - N$ des équipements (même s'il peut s'y ajouter d'autres coûts, par exemple le cumul des usages annuels des équipements au cours de la période $u = i - N$). La prise en compte du coût annuel de maintenance noté $M_u$ suscite dès lors une interrogation sur l'âge auquel ce coût atteindrait un montant si élevé qu'il serait préférable de mettre fin à l'exploitation de cet investissement « de première génération » pour le remplacer par un investissement « de deuxième génération ». La même question se poserait ensuite, en théorie, pour le remplacement de la deuxième génération par une troisième, et ainsi de suite, mais en pratique la prévision des données correspondantes devient de plus en plus hypothétique.

**Tableau A2.1**
**Notations : complément aux encadrés 2a et 2b**
**Répartition des coûts annuels entre maintenance et autres coûts**

$u = i - N$ *âge des équipements ayant fait l'objet de l'investissement j à la date N (dont jp en fonds publics)*

| Variable | Montant hors COFP | Fonds publics contenus | Montant COFP inclus |
|---|---|---|---|
| Coûts de l'année *i*, dont : | $c_i$ | $cp_i$ | $C_i = c_i + k.cp_i$ |
| …coûts de maintenance, supposé fonction de l'âge *u=i-N* | $m_u$ | $mp_u$ | $M_u = m_u + k.mp_u$ |
| …autres coûts de l'année *i* supposés indépendant de *N* | $h_i$ | $hp_i$ | $H_i = h_i + k.hp_i$ |

$r_D^* = \frac{r}{1 - \frac{1}{(1+r)^D}}$ Coefficient d'annuité constante équivalente, de taux *r* et de durée *D*

$J_D^* = J + \sum_{u=1}^{u=D} \frac{M_u}{(1+r)^u}$ Coût d'investissement plus maintenance actualisée, de taux *r* et de durée *D*

## 1. Durée d'exploitation (ou « longévité ») optimale : critère de l'annuité constante équivalente[26] (CACE)

La durée d'exploitation optimale *D* (ou longévité optimale) de l'investissement est telle que[27] :

[26] Ce critère est parfois appelé critère de Jacques Desrousseaux (1912-1993), qui l'a mis en exergue.

$$M_D < r_D^*. J_D^* \quad \text{et} \quad M_{D+1} > r_{D+1}^*. J_{D+1}^* \tag{201}$$

où $\quad r_D^* = \frac{r}{1-\frac{1}{(1+r)^D}}$ et $J_D^* = J + \sum_{u=1}^{u=D} \frac{M_u}{(1+r)^u}$,

$r_{D+1}^* = \frac{r}{1-\frac{1}{(1+r)^{D+1}}}$ et $J_{D+1}^* = J + \sum_{u=1}^{u=D+1} \frac{M_u}{(1+r)^u}$

Comme pour les autres variables, il y a lieu de distinguer au sein du coût annuel de maintenance la part assujettie au coût d'opportunité des fonds publics (COFP) :

$$M_u = m_u + k.mp_u \tag{201bis}$$

***Interprétation*** :

$J_D^* = J + \sum_{u=1}^{u=D} \frac{M_u}{(1+r)^u}$ est l'investissement augmenté de la somme actualisée (de la date *N* de réalisation de l'investissement à la date *N+D* de fin d'exploitation) des coûts annuels de maintenance $M_u$.

$r_D^* = \frac{r}{1-\frac{1}{(1+r)^D}}$ est le « coefficient d'annuité constante équivalente » : un flux annuel constant égal à $r_D^*$, actualisé entre les dates *N+1* et *N+D*, a – à la date *N* – une valeur actualisée cumulée égale à 1.

**La durée optimale d'exploitation *D* est telle que la dépense annuelle de maintenance devient égale (ou « presque égale ») à l'annuité constante équivalente des dépenses actualisées d'investissement et de maintenance** : si on augmentait l'âge de 1 année, la dépense annuelle de maintenance deviendrait supérieure à l'annuité constante équivalente des dépenses actualisées d'investissement et de maintenance.

## 2. Date optimale de réalisation de la première génération du projet : critère de rentabilité immédiate élargi (CRIE)

Est ici maintenue l'hypothèse simplificatrice que le bénéfice annuel $B_i$ est indépendant de la date *N* de l'investissement et qu'il en va de même pour $H_i$, en désignant ainsi le coût annuel de l'année *i* hormis le coût de maintenance $M_u$ : $C_i = M_{u=i-N} + H_i$

[27] Plus généralement, la problématique est celle de générations qui se succèdent à des dates inconnues *N1, N2, Nn,…* L'objectif est de maximiser la *VAN SE relati*ve à l'ensemble de ces générations successives entre la date $N_1$ et l'infini (sauf si l'avantage annuel net devient insuffisant à partir d'une certaine date). La condition ci-dessus est établie sur la base de l'hypothèse simplificatrice où le coût *J* de l'investissement et le coût annuel de maintenance $M_u$ , *u* années après l'investissement, sont inchangées (en euros de l'année de référence) que l'équipement appartienne à la première ou à la deuxième génération. Autrement dit, les générations d'équipements successives sont identiques les unes aux autres.

Une fois déterminée par (201) ci-dessus la longévité optimale *D* supposée commune aux générations successives du projet, le stade suivant consiste à déterminer la date optimale de réalisation de la première génération. En toute rigueur, il faudrait noter cette date $N_1$, mais pour alléger l'écriture on la notera ci-après $N$.

La date optimale $N$ de réalisation du projet (première génération) est alors donnée par :

$$B_N - H_N - r_D^*. J_D^* < 0 \quad \text{et} \quad B_{N+1} - H_{N+1} - r_D^*. J_D^* > 0 \qquad (202)$$

Formellement analogues aux conditions du CRI, ces conditions (202) peuvent être appelées « Critère de rentabilité immédiate élargie (CRIE) ».

Dans (202) :

- le taux d'actualisation *r* du CRI est remplacé dans le CRIE par le taux $r_D^*$, avec :

  $r_D^* = \frac{r}{1-\frac{1}{(1+r)^D}}$ (qui est supérieur au taux d'actualisation $r$)

- l'investissement *J* du CRI est remplacé par l'investissement + maintenance capitalisée $J_D^*$, avec :

  $J_D^* = J + \sum_{u=1}^{u=D} \frac{M_u}{(1+r)^u}$ (qui est supérieur à l'investissement initial $J$)

***Interprétation*** : il y a lieu de retarder la réalisation de la première génération du projet tant que ce que l'on perd (le bénéfice annuel diminué du coût annuel hors maintenance relatifs à la première année d'exploitation) est inférieur à ce que l'on économise : l'annuité constante équivalente des coûts d'investissement et de maintenance capitalisée.

***Remarque*** : compte tenu de (201), (202) peut s'écrire :

$$B_N - H_N - M_D < 0 \quad \text{et} \quad B_{N+1} - H_{N+1} - M_D > 0 \qquad (202\ \text{bis})$$

***Optimum en coin*** : comme dans le cas simplifié (§ 1a) du Complément opérationnel G, il faut vérifier si la date présente T est ou n'est pas susceptible de constituer un maximum en coin.

### 3. Date optimale de fin d'exploitation de la première génération du projet

La date de la fin d'exploitation de la première génération du projet est simplement :

*F=N+D* (203)

### 4. VAN SE (actualisée à la date de référence) de la première génération du projet, notée *W*

Sur la base des valeurs optimales ainsi estimées de la date *N* de réalisation de la première génération et de sa date de fin d'exploitation *F=N+D*, on peut calculer *W*, en appelant ainsi sa VAN SE propre (actualisée à la date de référence) :

$$W = -\frac{J}{(1+r)^N} + \sum_{i=N+1}^{i=N+D} \frac{B_i - C_i}{(1+r)^i} \qquad (204)$$

où (comme déjà dit) : $C_i = M_{u=i-N} + H_i$

c'est-à-dire, en mettant en évidence les composantes assujetties au coût d'opportunité des fonds publics (COFP noté *k* ) :

$$W = -\frac{j}{(1+r)^N} + \sum_{i=N+1}^{i=N+D} \frac{b_i - c_i}{(1+r)^i} - k \,.\left\{\frac{jp}{(1+r)^N} + \sum_{i=N+1}^{i=N+D} \frac{cp_i - bp_i}{(1+r)^i}\right\}$$

où :

$c_i = m_{u=i-N} + h_i$ et $cp_i = mp_{u=i-N} + hp_i$

**5. Estimation de la VAN SE d'ensemble du projet à partir de celle W de la seule première génération**

Dans l'approche simplifiée (1a) du Complément opérationnel G, la valeur résiduelle était implicitement nulle.

Ici, la valeur résiduelle *VR,* ou plus exactement le terme[28] $\frac{VR}{(1+r)^{N+D+1}}$ , représente la somme des contributions (actualisées à la date de référence) apportées par la deuxième génération et par toutes les générations suivantes à la VAN SE du projet dans son ensemble.

La dernière année d'exploitation $F = N + D$ de la première génération est censée coïncider avec l'année de réalisation de la deuxième génération, de façon à ce que l'exploitation de celle-ci commence l'année *F+1*, sans rupture dans le service rendu par le projet à ses usagers.

Avec l'hypothèse simplificatrice de générations successives identiques, la VAN SE (actualisée à la date de référence) de l'ensemble des générations successives du projet est donnée par :

$VAN\ SE = W.\rho$ où le multiplicateur $\rho$ est donné par : $\rho = \frac{1}{1-\frac{1}{(1+r)^D}}$ (205)

Le tableau 2 ci-dessous donne des exemples de valeur du coefficient $\rho$.

[28] Voir formules dans l'Encadré 2a.

**Tableau A2.2**
**Coefficient $\rho$ taux d'actualisation**

| Longévité *D* en années | *r* | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **2,5 %** | **3,5 %** | **4,5 %** | **5,5 %** |
| **10** | 4,570 | 3,435 | 2,808 | 2,412 |
| **25** | 2,171 | 1,734 | 1,499 | 1,355 |
| **50** | 1,410 | 1,218 | 1,124 | 1,074 |
| **75** | 1,186 | 1,082 | 1,038 | 1,018 |
| **100** | 1,092 | 1,033 | 1,012 | 1,005 |
| **200** | 1,007 | 1,001 | 1,000 | 1,000 |